

Projektovanje FIR digitalnih filtara

FIR – Finite Impulse Response – Konačan impulsni odziv



Katedra za elektroniku
prof dr Lazar Saranovac

Digitalna obrada signala - 2022/23

1

1

IIR - beskonačan impulsni odziv

U analognim sistemima ne postoje funkcije prenosa koje imaju samo nule, jer se to protivi uslovima fizičke ostvarljivosti.

Ne mešati to što je u praktičnim slučajevima impulsni odziv OGRANIČAVAN.

FIR - konačan impulsni odziv

Preko analognog prototipa - transformacijom?

Računski, diskretni, digitalni domen – moguće nešto i što nije “fizički” ostvarljivo

Funkcije prenosa sistema sa konačnim impulsnim odzivom (FIR) sintetizuju se direktnom sintezom u *z*-ravni.

- metod sinteze koji koristi prozorske funkcije za ograničavanje impulsnog odziva
- metod frekvencijskog odabiranja
- optimizacione metode projektovanja

- linearna faza
- linearna amplitudska karakteristika
- konstantan fazni pomeraj od 90°
- ...



Katedra za elektroniku

Digitalna obrada signala - 2022/23

2

2

Sistem koji ima konačan impulsni odziv

$$\begin{aligned} h[n] &\neq 0 \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \\ h[n] &= 0 \quad \text{za sve ostale vrednosti} \end{aligned}$$

Njegova z transformacija, odnosno funkcija prenosa sistema u z domenu

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n} = \frac{1}{z^{M-1}} \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{M-1-n}$$

Frekvencijski odziv

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-jn\Omega} = |H(e^{j\Omega})| e^{j\arg H(e^{j\Omega})} = M(\Omega) e^{j\theta(\Omega)}$$

Fazno kašnjenje

$$\tau_p(\Omega) = -\frac{\theta(\Omega)}{\Omega}$$

Grupno kašnjenje

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d\theta(\Omega)}{d\Omega}$$



3

FIR ne postoji u analognom svetu?

Pitanje:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

Inverzna bilinearna

$$H(s) = H(z) \Big|_{z = \frac{2}{T} + s} = b_0 + b_1 \frac{\frac{2}{T} - s}{\frac{2}{T} + s} = b_0 \left(\frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} + s} \right) + b_1 \left(\frac{\frac{2}{T} - s}{\frac{2}{T} + s} \right) = \frac{1}{b_0 - b_1} \frac{s + \frac{2}{T} \frac{b_0 + b_1}{b_0 - b_1}}{s + \frac{2}{T}}$$

Ako se primeni bilinearna $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$

$b_0 \neq b_1$ Postoji analogni prototip. Njegov impulsni odziv?

?



4

i fazno i grupno kašnjenje konstantno

$$\tau_g(\Omega) = \tau_p(\Omega) = \tau$$

$$\theta(\Omega) = -\tau\Omega = \tan^{-1} \frac{-\sum_{n=0}^{M-1} h[n] \sin n\Omega}{\sum_{n=0}^{M-1} h[n] \cos n\Omega}$$

$$\tan \tau\Omega = \frac{\sin \tau\Omega}{\cos \tau\Omega} = \frac{\sum_{n=0}^{M-1} h[n] \sin n\Omega}{\sum_{n=0}^{M-1} h[n] \cos n\Omega}$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} h[n](\cos n\Omega \sin \tau\Omega - \sin n\Omega \cos \tau\Omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] \sin(\tau\Omega - n\Omega) = 0$$

rešenje

$$\tau = \frac{M-1}{2}$$

$$h[n] = h[M-1-n], \quad n = 0, \dots, M-1$$



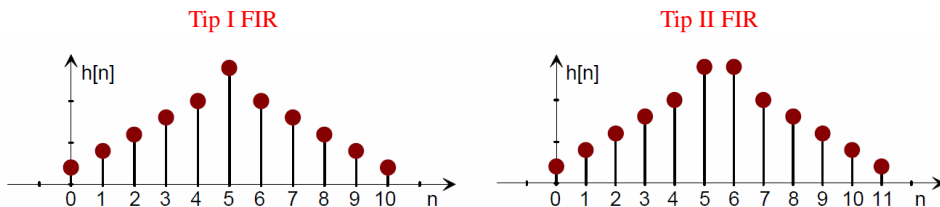
IMPULSNI ODZIV SIMETRIČAN

Tip I FIR filtra **M neparan** broj

impulsni odziv je simetričan u odnosu na centralni odbirak sa indeksom $(M-1)/2$

Tip II FIR filtra **M paran** broj

impulsni odziv je simetričan u odnosu na tačku koja leži na sredini između odbiraka sa indeksima $(M-2)/2$ i $M/2$



samo grupno kašnjenje konstantno

$$\theta(\Omega) = -\tau\Omega + \theta_0 = \tan^{-1} \frac{-\sum_{n=0}^{M-1} h[n] \sin n\Omega}{\sum_{n=0}^{M-1} h[n] \cos n\Omega}$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} h[n] \sin(\tau\Omega - \theta_0 - n\Omega) = 0$$

rešenje

$$\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \quad \tau = \frac{M-1}{2} \quad h[n] = -h[M-1-n], \quad n = 0, \dots, M-1$$



IMPULSNI ODZIV ANTISIMETRIČAN

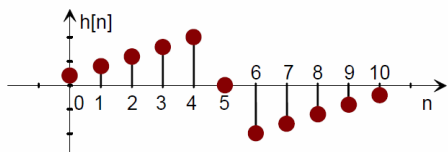
Tip III FIR filtra M **neparan broj**

impulsni odziv je antisimetričan u odnosu na centralni odbirak sa indeksom $(M-1)/2$

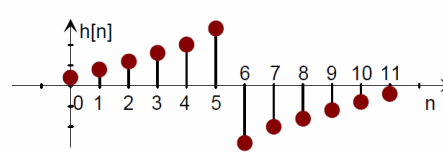
Tip IV FIR filtra M **paran broj**

impulsni odziv je antisimetričan u odnosu na tačku koja leži na sredini između odbiraka sa indeksima $(M-2)/2$ i $M/2$.

Tip III FIR

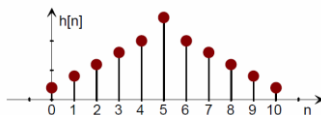


Tip IV FIR



Frekvencijska karakteristika

FIR tipa I - impulsni odziv simetričan, M neparan broj



$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n]e^{-jn\Omega} + h[(M-1)/2]e^{-j\Omega(M-1)/2} + \sum_{n=(M+1)/2}^{M-1} h[n]e^{-jn\Omega}$$

$$\sum_{n=(M+1)/2}^{M-1} h[n]e^{-jn\Omega} = \sum_{n=(M+1)/2}^{M-1} h[M-1-n]e^{-jn\Omega} = \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n]e^{-j\Omega(M-1-n)}$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \left\{ h[(M-1)/2] + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} 2h[n] \cos\Omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \right\}$$



Frekvencijska karakteristika

FIR tipa I

$$a_0 = h[(M-1)/2]$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a_k \cos\Omega k \quad a_k = 2h[(M-1)/2 - k]$$

FIR tipa II

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \cos\Omega \left(k - \frac{1}{2} \right) \quad b_k = 2h[M/2 - k]$$

FIR tipa III

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j[\Omega(M-1)/2 - \pi/2]} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin\Omega k = j e^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin\Omega k$$

FIR tipa IV

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j[\Omega(M-1)/2 - \pi/2]} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \sin\Omega \left(k - \frac{1}{2} \right) = j e^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \sin\Omega \left(k - \frac{1}{2} \right)$$



Uopšteno

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} e^{jK\pi/2} H_r(\Omega)$$

$$H_r(\Omega) = Q(\Omega)P(\Omega)$$

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega k$$

$K = 0$ za FIR filtre tipa I i II,
 $K = 1$ za FIR filtre tipa III i IV,
 $H_r(\Omega)$ realna funkcija učestanosti

FIR I
 $Q(\Omega) = 1$

FIR II

$$H_r(\Omega) = \cos \frac{\Omega}{2} \sum_{k=0}^{M/2-1} \alpha_k \cos \Omega k = Q(\Omega)P(\Omega)$$

$$\alpha_0 = 0.5b_1$$

$$\alpha_k = 2b_k - \alpha_{k-1} \quad k = 1, \dots, M/2 - 2$$

$$\alpha_{M/2-1} = 2b_{M/2}$$



FIR III

$$H_r(\Omega) = \sin \Omega \sum_{k=0}^{(M-3)/2} \alpha_k \cos \Omega k = Q(\Omega)P(\Omega)$$

$$\alpha_{(M-3)/2} = a_{(M-1)/2}$$

$$\alpha_{(M-5)/2} = 2a_{(M-3)/2}$$

⋮

$$\alpha_{k-1} - \alpha_{k+1} = 2a_k \quad k = 2, \dots, (M-5)/2$$

$$\alpha_0 + 0.5\alpha_2 = a_1$$

FIR IV

$$H_r(\Omega) = \sin \frac{\Omega}{2} \sum_{k=0}^{M/2-1} \alpha_k \cos \Omega k = Q(\Omega)P(\Omega)$$

$$\alpha_{M/2-1} = 2b_{M/2}$$

$$\alpha_{k-1} - \alpha_k = 2b_k \quad k = 2, \dots, M/2 - 1$$

$$\alpha_0 - 0.5\alpha_1 = b_1$$



Raspored nula

+ simetričan
- antisimetričan

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{M-1} h[M-1-n]z^{-n} = \pm \sum_{k=M-1}^0 h[k]z^k z^{-(M-1)} = \pm z^{-(M-1)} H(z^{-1})$$

1. Kompleksne nule funkcije prenosa koje ne leže na jediničnom krugu javljaju se u kvadrupletima (grupama po četiri konjugovano kompleksne i recipročne nule) na lokacijama: z_i, z_i^*, z_i^{-1} i $(z_i^*)^{-1}$,

2. Realne nule funkcije prenosa koje ne leže na jediničnom krugu javljaju se u recipročnim parovima: z_i, z_i^{-1} ,

3. Proizvoljan broj konjugovano kompleksnih parova nula može ležati na jediničnom krugu pošto je:

$$(z - z_i)(z - z_i^*) = (z - e^{j\phi_i})(z - e^{-j\phi_i}) = \left(z - \frac{1}{z_i^*}\right) \left(z - \frac{1}{z_i}\right)$$

4. Proizvoljan broj nula može ležati u tačkama $z_i = \pm 1$, jer je tada takođe $z_i^{-1} = \pm 1$.



Raspored nula

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{M-1} h[M-1-n]z^{-n} = \pm \sum_{k=M-1}^0 h[k]z^k z^{-(M-1)} = \pm z^{-(M-1)} H(z^{-1})$$

$$z = -1$$

$$H(-1) = \pm (-1)^{-(M-1)} H(-1)$$

Fir II, M parno $H(-1) = -H(-1)$ $H(-1) = 0$ mora imati nulu u tački $z = -1$

Fir III, M neparno $mora imati nulu u tački z = -1$

$$z = 1$$

$$H(1) = \pm H(1)$$

tip III i tip IV FIR filtra moraju imati nule u tački $z = 1$



Faza linearna

Aproksimacija amplitudske karakteristike

Diskretan sistem -> Željena amplitudska karakteristika periodična funkcija
Furijev red

$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega$$

$$H_D(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_D[n] e^{-jn\Omega}$$

$h[n]$ su koeficijenti Furijevog razvoja u red, periodične funkcije u frekvencijskom domenu. Ako ona predstavlja funkciju sistema onda su ovi koeficijenti impulsni odziv sistema.

$$e^{j\Omega} = z$$

$$H_D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_D[n] z^{-n}$$

Moguće napraviti?



Ograničavanje impulsnog odziva

Odsecanjem
$$\tilde{h}[n] = \begin{cases} h_D[n], & |n| \leq \frac{M-1}{2} \\ 0, & |n| > \frac{M-1}{2} \end{cases}$$
 želimo M neparno, za sada
Odziv simetričan oko $n=0$
$$\tilde{h}[-n] = \tilde{h}[n]$$

$$\tilde{H}(z) = \tilde{h}[0] + \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} (\tilde{h}[-n]z^{-n} + \tilde{h}[n]z^n) = \tilde{h}[0] + \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} \tilde{h}[n](z^{-n} + z^n)$$

Kauzalno? Još uvek ne! Pomeranje impulsnog odziva u desno za $\frac{M-1}{2}$
Odgovara množenju sa $z^{-\frac{M-1}{2}}$

$$H(z) = z^{-\frac{M-1}{2}} \tilde{H}(z) = z^{-\frac{M-1}{2}} \left(\tilde{h}[0] + \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} \tilde{h}[n](z^{-n} + z^n) \right) = z^{-\frac{M-1}{2}} \tilde{h}[0] + \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} z^{-\frac{M-1}{2}} \tilde{h}[n](z^{-n} + z^n)$$

$$h[n] = \tilde{h}\left[n - \frac{M-1}{2}\right] = \begin{cases} h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right], & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & n < 0, n \geq M \end{cases}$$

$$H(z) = \tilde{h}\left[-\frac{M-1}{2}\right] + \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} \tilde{h}\left[n - \frac{M-1}{2}\right](z^{-n} + z^n) = h[0] + \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} h[n](z^{-n} + z^n)$$



Digresija

$$M \text{ neparno} \quad \tilde{h}[n] = \begin{cases} h_D[n], & |n| \leq \frac{M-1}{2} \\ 0, & |n| > \frac{M-1}{2} \end{cases}$$

$$h[n] = \tilde{h}\left[n - \frac{M-1}{2}\right] = \begin{cases} h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right], & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & n < 0, n \geq M \end{cases} \quad H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n}$$

Tip I: $\tilde{h}[-n] = \tilde{h}[n]$

Tip III $\tilde{h}[-n] = -\tilde{h}[n]$

Filtar je dužine M (number of taps)

Red filtra $M-1$

Kašnjenje filtra celobrojno, $z^{\frac{M-1}{2}}$, i iznosi $\frac{M-1}{2}$, celobrojno



Digresija

M parno

Realan impulсни odziv treba da je simetričan (antisimetričan) u odnosu na tačku koja leži na sredini između odbiraka sa indeksima $(M-2)/2$ i $M/2$

impulсни odziv treba da bude izračunat u tačkama $-\frac{M-1}{2}, -\frac{M-1}{2} + 1, \dots, +\frac{M-1}{2}$

$$\tilde{h}[x] = \begin{cases} h_D[x], & x = -\frac{M-1}{2}, -\frac{M-1}{2} + 1, \dots, +\frac{M-1}{2} \\ 0, & \text{za ostale vrednosti} \end{cases}$$

$$h[n] = \tilde{h}\left[n - \frac{M-1}{2}\right] = \begin{cases} h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right], & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & n < 0, n \geq M \end{cases} \quad \frac{M-1}{2} \text{ nije celobrojno}$$

Kašnjenje filtra nije celobrojno $z^{\frac{M-1}{2}}$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n}$$

Tip II: $\tilde{h}[-n] = \tilde{h}[n]$

Tip IV $\tilde{h}[-n] = -\tilde{h}[n]$

Zato se u praksi radije radi sa M neparno



Digresija

M parno - impulzni odziv treba da bude izračunat u tačkama $-\frac{M-1}{2}, -\frac{M-1}{2} + 1, \dots, +\frac{M-1}{2}$

Šta to znači?

$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega$$

$$H_D(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_D[n] e^{-jn\Omega}$$

$$h_D\left[n - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\Omega}) e^{j(n-\frac{1}{2})\Omega} d\Omega$$

$$h_D\left[n - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(H_D(e^{j\Omega}) e^{-j\frac{\Omega}{2}} \right) e^{jn\Omega} d\Omega$$

$$h_D\left[n - \frac{1}{2}\right] = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(H_D(e^{j\Omega}) \right) e^{jn\Omega} d\Omega = e^{-j\frac{\Omega}{2}} h_D[n]$$

$$e^{-j\frac{\Omega}{2}} H_D(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\Omega}{2}} h[n] e^{-jn\Omega}$$

$$e^{-j\frac{\Omega}{2}} H_D(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_D\left[n - \frac{1}{2}\right] e^{-jn\Omega}$$

Ništa nismo pogrešili, osim „dodatnog faznog lineranog“ stava



Koliko dobro?

Pravimo idealan NF sa linearnom fazom $H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\Omega\tau}, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$

$$h_D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{-j\Omega\tau} e^{jn\Omega} d\Omega$$

$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{j(n-\tau)\Omega_c} - e^{j(n-\tau)\Omega_c}}{j(n-\tau)} \right) = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}((n-\tau)\Omega_c)$$

Digresija, lineranu fazu smo mogli da pravimo i podrazumevamo simetrično odnosno antisimetrično uzimanje odmeraka

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

$$h_D[n] = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}(n\Omega_c)$$



Koliko dobro?

$$h_D[n] = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}(n\Omega_c)$$

$$H_D(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_D[n]e^{-jn\Omega} \longrightarrow \tilde{H}_D(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} h_D[n]e^{-jn\Omega}$$

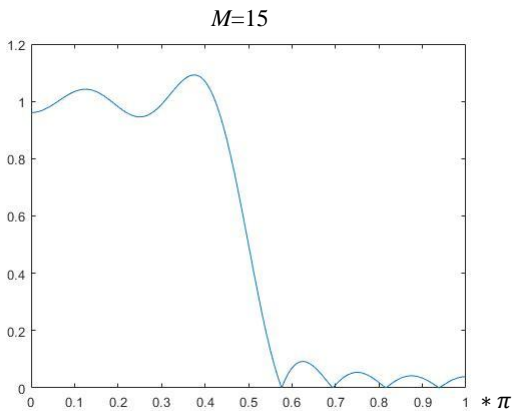
$$h[n] = \tilde{h}\left[n - \frac{M-1}{2}\right] = \begin{cases} h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right], & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & n < 0, n \geq M \end{cases}$$

$$H_D(e^{j\Omega}) \approx H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-jn\Omega}$$

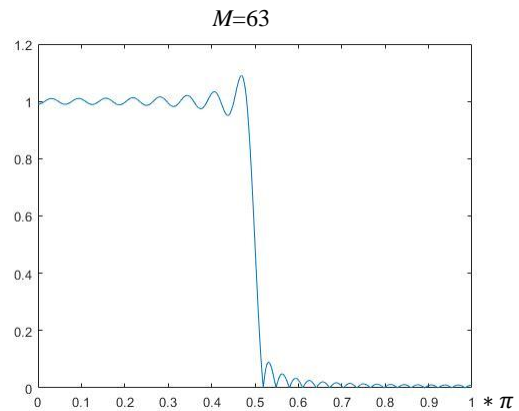
$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n}$$



Koliko dobro?



$$\Omega_c = \frac{\pi}{2}$$



Podseća Vas na nešto?
Gibsove oscilacije

Najveće oscilacije oko Ω_c

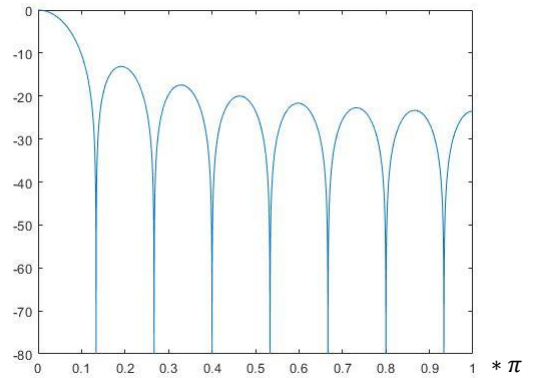
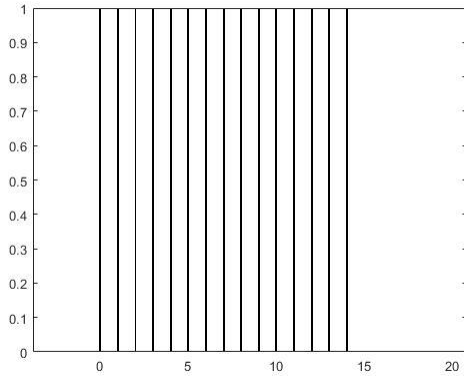
Premašenje amplitude oko 9%, 0.75dB
Slabljenje samo 21dB, ne zavisi od M



Šta smo uradili?

Odmerke $h_D[n]$ smo pomnožili pravougaonom prozorskom funkcijom dužine M

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 0 & \text{za ostalo } n \end{cases}$$



$$W(j\Omega) = N \cdot e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\frac{N}{2}\Omega\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\Omega\right)}$$



Pravougaona prozorska funkcija

Razlog za pojavu Gibsovih oscilacija je konvolucija u frekvencijskom domenu između željene frekvencijske karakteristike i frekvencijske karakteristike pravougaone prozorske funkcije koja izaziva odstupanja od željene karakteristike.

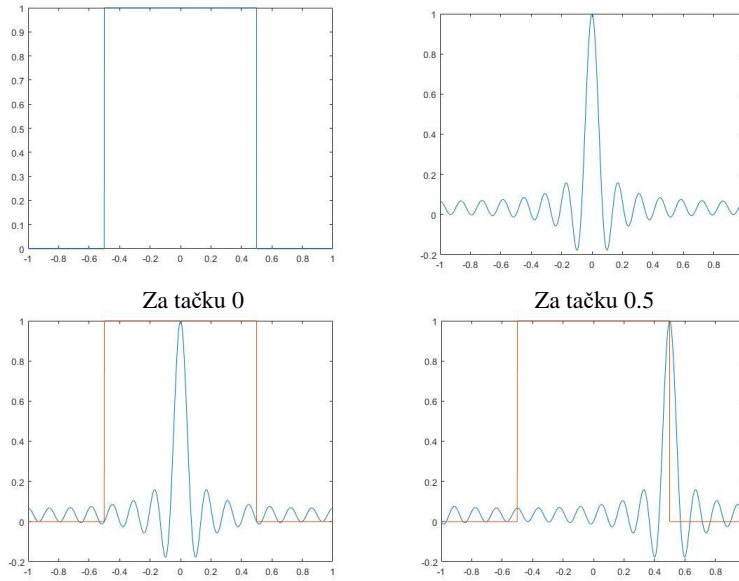
Odstupanja su posledice dve karakteristike spektra prozorske funkcije.

Širina glavnog luka u spektru prozorske funkcije utiče na širinu prelazne zone, dok amplituda bočnih lukova u spektru prozorske funkcije utiče na amplitudu Gibsovih oscilacija.

Dakle, dobra prozorska funkcija trebalo bi da ima što užu glavni luk i što veće potiskivanje bočnih lukova, što su kontradiktorni zahtevi.



Konvolucija ove dve funkcije



Odsecanje ali sa drugim prozorskim funkcijama „iz istog razloga“ kao kod DFTa

$$W(z) \quad h_w[n] = \begin{cases} w[n]h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right], & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & n < 0, n \geq M \end{cases}$$

z transformacija proizvoda dve sekvence

$$H_w(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} H_D(u)W\left(\frac{z}{u}\right)u^{-1}du$$

smena $z = e^{j\Omega}$ i $u = e^{j\upsilon}$

$$H_w(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\upsilon})W[e^{j(\Omega-\upsilon)}]d\upsilon$$

Ništa novo, samo napisano drugačije

Digresija: Sada su **simetrične** a ne periodične

Gruba procena: *red filtra* \approx

$$\frac{\text{dozvoljena normalizovana prelazna zona}}{4} \text{ ili}$$

$$\frac{f_s}{\text{širina prelazne zone}} \cdot \frac{\text{potrebno slabljenje u nepropusnoj zoni}}{22} \text{ ili}$$

$$M \geq \frac{-10 \log(\delta_p \delta_a) - 13}{2.324 B_t} + 1$$

$$B_t = \Omega_a - \Omega_p$$

$$\text{VF} \quad H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_c \\ 1, & \Omega_c \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{PO} \quad H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_{c1} \\ 1, & \Omega_{c1} \leq |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 0, & \Omega_{c2} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{NO} \quad H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_{c1} \\ 0, & \Omega_{c1} \leq |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 1, & \Omega_{c2} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$



1. Prozorske funkcije u spektralnoj analizi najčešće imaju paran broj članova (obično 2^p) dok prozorske funkcije u sintezi FIR filtara imaju neparan broj članova. Ova razlika je posledica činjenice da najefikasniji algoritmi za izračunavanje DFT zahtevaju da sekvenca ima paran broj članova, a u sintezi FIR filtara se izbegava paran broj odbiraka u impulsnom odzivu jer unosi necelobrojno kašnjenje.

2. Širina prelazne zone između propusnog i nepropusnog opsega povezana je nelinearnom relacijom sa širinom glavnog luka u spektru prozorske funkcije.

3. Maksimalna greška amplitudske karakteristike FIR filtra zavisi na nelinearan način od maksimalne amplitude bočnih lukova u spektru prozorske funkcije.

Zbog pojava navedenih pod 2 i 3, teško je unapred proceniti da li će primena izabrane prozorske funkcije dati zadovoljavajući rezultat u sintezi FIR filtra

Prozor	Širina prelazne zone	Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu	β za ekvivalentni Kajzerov prozor	Širina prelazne zone sa ekvivalentnim prozorom
Pravougaoni	$1.8\pi/M$	-21	0	$1.81\pi/(M-1)$
Hanov	$6.2\pi/(M-1)$	-44	3.86	$5.01\pi/(M-1)$
Hemingov	$6.6\pi/(M-1)$	-53	4.86	$6.27\pi/(M-1)$
Blekmanov	$11\pi/(M-1)$	-74	7.04	$9.19\pi/(M-1)$



Sinteza FIR filtera pomoću Kajzerove prozorske funkcije

Kajzerova prozorska funkcija našla je najveću primenu u sintezi FIR filtera sa linearnom, fazom, zbog toga što je definisana jednostavnim izrazom, u kome se slobodnim parametrom β može ostvariti kompromis između širine glavnog luka i amplitude bočnih lukova u spektru prozorske funkcije. Time se indirektno može podešavati širina prelazne zone i varijacija amplitude u propusnom i nepropusnom opsegu. Dosta pouzdano se dobijaju željene specifikacije.

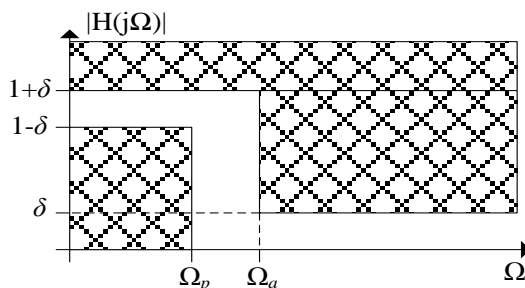
$$w[n] = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{M-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)} \quad I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right)^2$$

Na primer, ako se upotrebi veća vrednost za β dobija se prozorska funkcija sa postepenijim prekidom što za posledicu ima manje amplitude bočnih lukova i veću širinu glavnog luka u spektru. Rezultujući filter ima širu prelaznu zonu, manju varijaciju amplitude u propusnom opsegu i veće slabljenje (manju varijaciju amplitude u nepropusnom opsegu). Interesantno je primetiti da se većina poznatih prozorskih funkcija može aproksimirati pomoću Kajzerove prozorske funkcije izborom pogodne vrednosti za parametar β . U Prethodnoj tabeli su navedene vrednosti parametra β koje obezbeđuju istu grešku amplitude kao neke poznate prozorske funkcije, kao i širine prelazne zone filtra koje se takvom aproksimacijom dobijaju.



Pošto je kod Gibsovih oscilacija amplituda greške u propusnom i nepropusnom opsegu ista, i pošto prozorske funkcije samo ublažavaju dejstvo Gibsovih oscilacija, dozvoljena greška u propusnom i nepropusnom opsegu mora biti ista, tj. $\delta_p = \delta_a = \delta$.

Ako se u postupku formiranja specifikacija izaberu različite vrednosti za δ_p i δ_a , u sintezi se mora koristiti manja od dve specificirane vrednosti.



1

Na osnovu zadatih specifikacija Ω_p , Ω_a , α_p i α_a određuje se širina prelazne zone

$$B_t = \Omega_a - \Omega_p$$

granična učestanost idealnog NF filtra

$$\Omega_c = \frac{\Omega_a + \Omega_p}{2}$$

i vrednosti za δ_p i δ_a prema izrazima

$$\delta_p = \frac{10^{0.05\alpha_p} - 1}{10^{0.05\alpha_p} + 1}$$

$$\delta_a = 10^{-0.05\alpha_a}$$



2

Izabere se vrednost greške δ prema izrazu: $\delta = \min(\delta_p, \delta_a)$

Ako je $\delta \neq \delta_a$, izračuna se nova vrednost za α_a prema izrazu: $\alpha_a = -20 \log \delta$

3

Izabere se vrednost parametra β prema empirijskom izrazu

$$\beta = \begin{cases} 0, & \alpha_a < 21 \text{ dB} \\ 0.5842(\alpha_a - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_a - 21), & 21 \text{ dB} \leq \alpha_a \leq 50 \text{ dB} \\ 0.1102(\alpha_a - 8.7), & \alpha_a > 50 \text{ dB} \end{cases}$$

4

Odredi se broj članova impulsnog odziva prozorske funkcije prema izrazu

$$D = \begin{cases} 0.9222, & \alpha_a \leq 21 \text{ dB} \\ \frac{\alpha_a - 7.95}{14.36}, & \alpha_a > 21 \text{ dB} \end{cases}$$

Najmanji neparan broj M koji zadovoljava $M \geq \frac{2\pi D}{B_t} + 1$



5

Formira se $w[n] = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{M-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$

6

Izračunaju se koeficijenti razvoja funkcije prenosa idealnog NF filtra

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_c} e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{n\pi} \sin \Omega_c n, \quad |n| \leq \frac{M-1}{2}$$

7

Formira se impulsni odziv FIR filtra prema izrazu

$$h[n] = h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right] w_K[n], \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] z^{-n}$$



VF $B_t = \Omega_p - \Omega_a$

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_c \\ 1, & \Omega_c \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

PO $B_t = \min[(\Omega_{p1} - \Omega_{a1}), (\Omega_{a2} - \Omega_{p2})]$

$$\Omega_{c1} = \Omega_{p1} - \frac{B_t}{2}, \quad \Omega_{c2} = \Omega_{p2} + \frac{B_t}{2}$$

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_{c1} \\ 1, & \Omega_{c1} \leq |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 0, & \Omega_{c2} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

NO $B_t = \min[(\Omega_{a1} - \Omega_{p1}), (\Omega_{p2} - \Omega_{a2})]$

$$\Omega_{c1} = \Omega_{p1} + \frac{B_t}{2}, \quad \Omega_{c2} = \Omega_{p2} - \frac{B_t}{2}$$

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_{c1} \\ 0, & \Omega_{c1} \leq |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 1, & \Omega_{c2} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$



Dobro –

Jednostavnost i postojanje eksplicitnih izraza za odbirke skoro svih prozorskih funkcija (izuzimajući Dolf-Čebiševljevu prozorsku funkciju).

Loše -

Ako idealna frekvencijska karakteristika koju treba aproksimirati nije data jednostavnim izrazima, može se desiti da ne postoji eksplicitno rešenje za vrednost određenog integrala kojim se računa impulsni odziv. U takvom slučaju mora se pristupiti numeričkom izračunavanju integrala **za šta se može iskoristiti Diskretna Furijeova transformacija**.

Drugi problem koji se pojavljuje kod primene prozorskih funkcija je relativno mala fleksibilnost pri projektovanju. Iako se na početku postupka projektovanja zadaju specifikacije zagranične učestanosti Ω_p i Ω_a nema nikakve garancije da će te granice zaista biti i realizovane u postupku sinteze. Naime, zbog konvolucione veze spektara idealne karakteristike i prozorske funkcije, prozorska funkcija u suštini ublažava diskontinualni prelaz iz propusnog u nepropusni opseg kod idealnog filtra. Tako se granična učestanost idealnog filtra, Ω_c , na komplikovan način preslikava u dve granične učestanosti, Ω_p i Ω_a .



Jedan od glavnih nedostataka metoda sinteze pomoću prozorskih funkcija je što rezultujuće funkcije prenosa **nisu optimalne** ni po kakvom poznatom kriterijumu.

To znači, a taj zaključak je potvrđen i u praksi, da se uvek može sintetizovati filter sa boljim performansama.

Ovaj zaključak važi čak i u slučaju da se koriste optimalne prozorske funkcije, kao što su Kajzerova ili DolfČebiševljeva, jer je dejstvo prozorske funkcije na rezultujuće rešenje posredno, preko konvolucione relacije.

Zbog toga se često, a naročito ako je na raspolaganju računar, koriste alternativne metode za projektovanje FIR filterarskih funkcija

Iz prethodnih razmatranja se vidi da metod prozorskih funkcija nije pogodan za primenu u slučajevima kada su specifikacije za frekvencijsku karakteristiku FIR sistema takve da integral u frekvencijskom domenu nije lako izračunati (nije idealn filter itd...) U takvim slučajevima pogodan metod sinteze predstavlja metod odabiranja u frekvencijskom domenu, koji, osim toga, često omogućava i vrlo efikasnu realizaciju FIR sistema.



Realizacija na osnovu odbiraka u frekvencijskom domenu

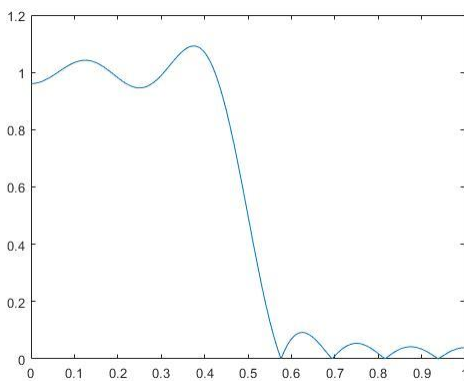
Neka je željeni frekvencijski odziv specificiran za određeni broj diskretnih učestanosti ω_k . Mada, u principu, učestanosti na kojima se specificira frekvencijski odziv mogu biti proizvoljno raspoređene, najčešće se koristi ekvidistantni raspored.

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha), \quad \alpha = 0 \text{ ili } 1/2, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j\Omega n}$$

$$H(e^{j\Omega_k}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M} = H\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right) = H[k + \alpha], \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H[k + \alpha]e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$



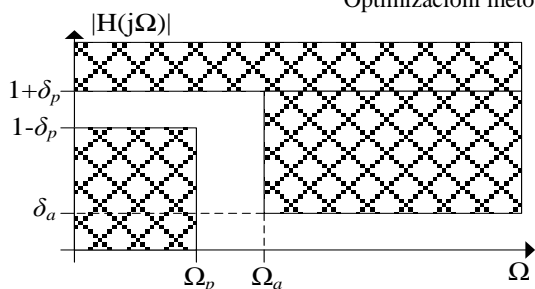
Ako se detaljnije analizira ponašanje amplitudske karakteristike, lako se može uočiti da su odstupanja amplitudske karakteristike (greška aproksimacije) najveća u blizini graničnih učestanosti.

Iz teorije analognih, kao i diskretnih IIR filtara, znatno bolji rezultati u pogledu aproksimacije amplitudske karakteristike mogu se dobiti ako se greška aproksimacije ravnomerno rasporedi unutar propusnog i nepropusnog opsega, što je pokazano na primerima Čebiševljeve i eliptičke aproksimacije.

Slična ideja se može primeniti i u sintezi FIR filtarskih funkcija, odnosno, problem aproksimacije amplitudske karakteristike FIR filtra se može posmatrati kao problem aproksimacije u Čebiševljevom smislu.



Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema



Idealna **realna** funkcija koju treba aproksimirati

$$H_{dr}(\Omega)$$

Težinska funkcija koja pokazuje
relativan uticaj greške u
pojedinom opsegu

$$W(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_p \\ \frac{\delta_p}{\delta_a} = K, & \Omega_a < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

Hoćemo

NF Kao i uvek

$$1 - \delta_p \leq H_r(\Omega) \leq 1 + \delta_p, \quad |\Omega| \leq \Omega_p$$

$$-\delta_a \leq H_r(\Omega) \leq \delta_a, \quad |\Omega| \geq \Omega_a$$



Greška aproksimacije sa težinom

$$E(\Omega) = W(\Omega)[H_{dr}(\Omega) - H_r(\Omega)] = W(\Omega)[H_{dr}(\Omega) - Q(\Omega)P(\Omega)]$$

$$E(\Omega) = W(\Omega)Q(\Omega) \left[\frac{H_{dr}(\Omega)}{Q(\Omega)} - P(\Omega) \right] = \hat{W}(\Omega) [\hat{H}_{dr}(\Omega) - P(\Omega)]$$

Čebiševljevi aproksimacioni problem se sastoji u određivanju koeficijenata polinoma $P(\Omega)$ koji minimizuju maksimalnu apsolutnu vrednost $E(\Omega)$ u opsezima S učestanosti od interesa.

Treba naći skup koeficijenata α_k , koji zadovoljavaju jednačinu

$$\min_{\alpha_k, k \in [0, L]} \left[\max_{\Omega \in S} |E(\Omega)| \right] = \min_{\alpha_k, k \in [0, L]} \left\{ \max_{\Omega \in S} \left| \hat{W}(\Omega) \left[\hat{H}_{dr}(\Omega) - \sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega k \right] \right| \right\}$$



Digresija

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} e^{jK\pi/2} H_r(\Omega)$$

$$K = 0 \quad \text{I, II}$$

$$K = 1 \quad \text{III, IV}$$

$$H_r(\Omega) = Q(\Omega)P(\Omega)$$

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega k$$

$$Q(\Omega)$$

$$\text{Tip I} \quad 1$$

$$\text{Tip II} \quad \cos \frac{\Omega}{2}$$

$$\text{Tip III} \quad \sin \Omega$$

$$\text{Tip IV} \quad \sin \frac{\Omega}{2}$$



Teorema alternacije

S označava zatvoreni skup koji se sastoji od disjunktne unije zatvorenih podskupova ose učestanosti Ω u intervalu $[0, \pi)$

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega k$$

predstavlja jedinstvenu, najbolju Čebiševljevu aproksimaciju funkcije na skupu S

Potrebno i dovoljno

1. funkcija greške $E(\Omega)$ ima bar $L + 2$ ekstremuma na skupu učestanosti S
2. mora postojati bar $L + 2$ učestanosti $\Omega_i, i=1, \dots, L + 2$, gde je $E(\Omega_i) = -E(\Omega_{i+1})$

$$|E(\Omega_i)| = \max_{\Omega \in S} |E(\Omega)|, \quad i = 1, \dots, L + 2$$



Čebiševljevi polinomi $T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x) & |x| \geq 1 \end{cases}$

$$T_N(\cos \Omega) = \cos N\Omega$$

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega k = \sum_{k=0}^L \alpha_k T_k(\cos \Omega) = \sum_{k=0}^L \beta_k (\cos \Omega)^k$$

Vrednosti koeficijenata β_k se mogu odrediti na osnovu poznavanja koeficijenata Čebiševljevihi polinoma i koeficijenata α_k , odnosno $h[n]$, ali, kao što će biti pokazano, to nije potrebno.

Ekstremumi - ako su $W(\Omega)$ i $H_{dr}(\Omega)$ funkcije sačinjene od konstantnih segmenata

$$E(\Omega) = W(\Omega)[H_{dr}(\Omega) - H_r(\Omega)] = W(\Omega)[H_{dr}(\Omega) - Q(\Omega)P(\Omega)]$$

$$\frac{dE(\Omega)}{d\Omega} = -\frac{dH_r(\Omega)}{d\Omega} = 0$$



FIR I

trigonometrijski polinom L -tog reda po $\cos \omega$

izvod ima najviše $L - 1$ nula, $L - 1$ lokalnih ekstremuma

$$\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} = -\sin \Omega \left[\sum_{k=1}^L \beta_k k (\cos \Omega)^{k-1} \right]$$

$\Omega = 0$ i $\Omega = \pi$ još dva ekstremuma

Funkcija greške mora imati ekstremne vrednosti i na učestanostima Ω_p i Ω_a , inače uslov alternacije ekstremuma ne bi bio zadovoljen

Maksimalan broj ekstremuma funkcije greške je $L + 3$ u slučaju NF i VF filtarskih funkcija.

U slučaju PO i NO filtarskih funkcija maksimalan broj ekstremalnih tačaka funkcije greške je $L + 5$

U slučaju optimalne aproksimacije apsolutne vrednosti svih ekstremuma su jednake, osim u tačkama $\Omega = 0$ ili $\Omega = \pi$. Dokaz ove osobine je vrlo jednostavan. Ako je vrednost funkcije greške u nekoj ekstremalnoj tački manja od ostalih, onda se pri numeraciji ekstremuma mora izostaviti ne samo ta tačka, već i jedna susedna ekstremalna tačka, jer inače ne bi bio zadovoljen uslov alternacije. Zbog toga se ova klasa filtarskih funkcija naziva optimalna aproksimacija ili aproksimacija sa jednakim odstupanjima (engl. equiripple).



Rešavanje aproksimacionog problema

Teorema alternacije daje potrebne i dovoljne uslove za postojanje optimalne aproksimacije, ali ne daje odgovor na pitanje kako naći takvu aproksimaciju

Remezov algoritam za izjednačavanje ekstremuma

Precizno kontrolise parametre L , Ω_p , Ω_a i δ_p/δ_a , dok je δ_p (ili δ_a) promenljivi parametar.

Ovaj metod je najčešće poznat kao *Parks-MekKlelanov algoritam* (Parks-McClellan) prema autorima prvog publikovanog računarskog programa za primenu Remezovog algoritma u projektovanju FIR filtara.

Na učestanostima ekstremuma funkcija greške optimalnog rešenja

$$E(\Omega_n) = \hat{W}(\Omega_n) [\hat{H}_{dr}(\Omega_n) - P(\Omega_n)] = (-1)^n \delta, \quad n = 0, 1, \dots, L+1$$

$$P(\Omega_n) + \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\Omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\Omega_n), \quad n = 0, 1, \dots, L+1$$

$$\sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega k + \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\Omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\Omega_n), \quad n = 0, 1, \dots, L+1$$



$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \Omega_0 & \cos 2\Omega_0 & \cdots & \cos L\Omega_0 & \frac{1}{\hat{W}(\Omega_0)} \\ 1 & \cos \Omega_1 & \cos 2\Omega_1 & \cdots & \cos L\Omega_1 & \frac{-1}{\hat{W}(\Omega_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \Omega_{L+1} & \cos 2\Omega_{L+1} & \cdots & \cos L\Omega_{L+1} & \frac{(-1)^{L+1}}{\hat{W}(\Omega_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_L \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{dr}(\Omega_0) \\ \hat{H}_{dr}(\Omega_1) \\ \vdots \\ \hat{H}_{dr}(\Omega_L) \\ \hat{H}_{dr}(\Omega_{L+1}) \end{bmatrix}$$

$L + 2$ nepoznatih učestanosti Ω_n
 $L + 1$ nepoznatih koeficijenata α_k
 vrednost maksimalne greške δ

Remezov algoritam zamene iterativno rešava problem odredivanja $2(L + 2)$ nepoznatih parametara



Digresija

Remezov algoritam predstavlja iterativni postupak za određivanje najbolje ravnomerne aproksimacije neprekidne funkcije $f(x)$ polinomom stepena n na intervalu $[a, b]$.

Korak 0: Izabrati $n + 2$ različite tačke $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ sa intervala $[a, b]$. Obično se za x_i uzimaju nule Čebiševljevog polinoma.

Korak 1: Rešiti sistem linearnih jednačina

$$b_0 + b_1 x_i + \dots + b_n x_i^n + (-1)^i E = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n + 1$$

po nepoznatim b_0, b_1, \dots, b_n i E .

Korak 2: Formirati polinom $p(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$.

Korak 3: U tačkama x_i funkcija $p(x) - f(x)$ menja znak, pa postoji bar $n + 1$ nula ove funkcije koje dele $[a, b]$ na $n+2$ intervala.

Tačke x_i zameniti novim tačkama y_i u kojima se dostiže lokalni maksimum funkcije $|p(x) - f(x)|$ u intervalu kome pripada x_i .

Ukoliko je $p(x_i) - f(x_i) = +|E|$, treba naći lokalni maksimum funkcije $p(x) - f(x)$ u okolini x_i , a ukoliko je $p(x_i) - f(x_i) = -|E|$, naći lokalni minimum. Pošto je algoritam iterativan, ove ekstreme nije potrebno tačno izračunati, dovoljno je npr. par iteracija kvadratnog fitovanja. Tačku y_0 očekujemo da je u okolini a , tačku y_{n+1} u okolini b , a preostale y_i u okolini tačaka x_i .

Označimo $z_i = p(y_i) - f(y_i)$. Po konstrukciji je $|z_i| \geq |E|$, pa je $\min_i |z_i| \geq |E|$ nova donja granica optimalne greške aproksimacije.

Korak 4: Ažurirati tačke x_i novodobijenim tačkama y_i . Pošto je $\max_i |z_i|$ gornja granica optimalne greške (dostiže se na polinom $p(x)$), za kriterijum zaustavljanja se može koristiti dovoljno mala razlika $\min_i |z_i|$ i $\max_i |z_i|$.

Ukoliko tačnost nije zadovoljena, ići na Korak 1.



Metod sinteze pomoću prozorskih funkcija je najjednostavniji za primenu. Na žalost, ovim metodom se ne mogu tačno realizovati zadate učestanosti Ω_p i Ω_a , čija vrednost zavisi od korišćene prozorske funkcije i izabrane vrednosti M . Dužina impulsnog odziva, M , koja se dobija ovim metodom je najveća, što znači najveću složenost realizacije.

Metod sinteze pomoću odabiranja u frekvencijskom domenu obavezno zahteva upotrebu računara i programa za optimizaciju parametara. Može se reći da je od opisanih metoda najteži za primenu. Kontrola položaja graničnih učestanosti Ω_p i Ω_a je nešto bolja nego kada se primenjuju prozorske funkcije, a greška graničnih učestanosti je manja od $2\pi/M$. Mada se za sintezu koristi praktično ista vrednost za M kao kod metoda prozorskih funkcija, složenost realizacije je znatno manja zbog mogućnosti korišćenja specijalne realizacione strukture.

Čebiševljeva aproksimacija omogućava najbolju kontrolu specifikacija i u tom pogledu je najbolja. Granične učestanosti Ω_p i Ω_a se tačno realizuju, a dužina impulsnog odziva se dosta tačno može proceniti empirijskim formulama. U filterskim aplikacijama, potrebna dužina impulsnog odziva je znatno manja nego kod prethodna dva metoda sinteze, često i za 30%. Čebiševljeva aproksimacija je optimalna u smislu da za dato M omogućava najmanju širinu prelazne zone. S obzirom na široku rasprostranjenost optimizacionih programa za Čebiševljevu aproksimaciju, ovaj metod je danas standardni metod za sintezu FIR funkcija prenosa sa linearnom fazom.



Zadatak 4

Pomoću trougaone prozorske funkcije i impulsnog odziva idealnog filtra potrebno je projektovati niskopropusni FIR filtar koji treba da bude 18. reda, da ima linearnu faznu karakteristiku i granične učestanosti $\Omega_p = 3\pi/8$ i $\Omega_a = 5\pi/8$.

- [10] Izračunajte impulsni odziv $h[n]$ idealnog filtra koji se koristi za projektovanje filtra iz ovog zadatka.
- [5] Odredite i skicirajte trougaoni prozor koji je potrebno iskoristiti za projektovanje FIR filtra, a zatim odredite impulsni odziv traženog FIR filtra korišćenjem dobijenih rezultata iz ove i prethodne tačke.
- [5] Nacrtati direktnu transponovanu realizaciju FIR filtra iz tačke b).



$$\text{a) } \quad \Omega_c = \frac{\Omega_c + \Omega_c}{2} = \frac{\pi}{2} \quad M = n_{max} + 1 = 18 + 1 = 19$$
$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} 1 \cdot e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{\sin(n\Omega_c)}{n\pi} \quad n = -9, -8, \dots, 8, 9$$
$$h_D[n] = \left[\frac{1}{9\pi}, 0, -\frac{1}{7\pi}, 0, \frac{1}{5\pi}, 0, -\frac{1}{3\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, 1, \frac{1}{\pi}, 0, -\frac{1}{3\pi}, 0, \frac{1}{5\pi}, 0, -\frac{1}{7\pi}, 0, \frac{1}{9\pi} \right]$$

$$\text{b) } \quad w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M+1} & 1 \leq n \leq \frac{M+1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{M+1} & \frac{M+1}{2} + 1 \leq n \leq M \end{cases}$$

$$w[n] = \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, 1, \frac{9}{10}, \frac{8}{10}, \frac{7}{10}, \frac{6}{10}, \frac{5}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10} \right]$$

$$h[n] = h_D[n-9]w[n] = \left[\frac{1}{90\pi}, 0, -\frac{3}{70\pi}, 0, \frac{5}{50\pi}, 0, -\frac{7}{30\pi}, 0, \frac{9}{10\pi}, 1, \frac{9}{20\pi}, 0, -\frac{7}{30\pi}, 0, \frac{5}{50\pi}, 0, -\frac{3}{70\pi}, 0, \frac{1}{90\pi} \right]$$

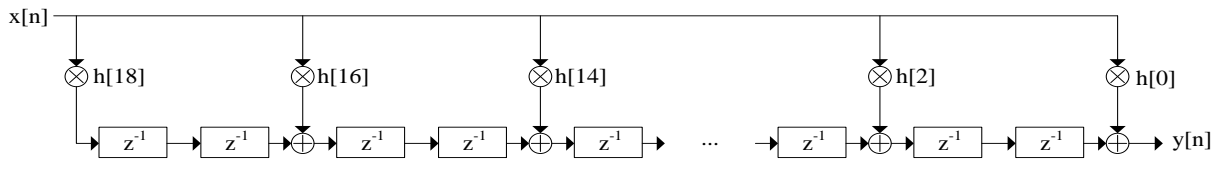


c)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} \quad Y(z) = X(z) \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]X(z)z^{-n}$$

$$y[n] = Z^{-1}(Y(z)) = Z^{-1}\left(\sum_{k=0}^{M-1} h[k]X(z)z^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]Z^{-1}(X(z)z^{-k}) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

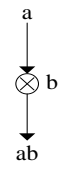
direktna transponovana realizacija



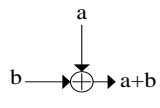
Tok signala



Množič



Sabirač



kašnjenje

